

東邦大学学術リポジトリ

Toho University Academic Repository

| | |
|-----------|---|
| タイトル | Iterative sequences for finitely many resolvent operators in geodesic spaces |
| 作成者（著者） | 笠原, 健吾 |
| 公開者 | 東邦大学 |
| 発行日 | 2021.03.17 |
| 掲載情報 | 東邦大学大学院理学研究科 博士論文 内容の要旨及び審査結果の要旨. |
| 資料種別 | 学位論文 |
| 内容記述 | 主査: 木村泰紀 |
| 著者版フラグ | none |
| 報告番号 | 32661甲第1007号 |
| 学位記番号 | 甲第164号 |
| 学位授与年月日 | 2021.03.17 |
| 学位授与機関 | 東邦大学 |
| メタデータのURL | https://mylibrary.toho u.ac.jp/webopac/TD28182549 |

論文審査の要旨及び審査結果の要旨

| | | |
|---|---|---------|
| 2018年入学 | 研究分野 非線形解析学 | 氏名 笠原健吾 |
| 審査委員 | (主査) 木村泰紀 教授 (副査) 豊田昌史 教授 (副査) 白柳潔 教授 (副査) 並木誠 教授 (副査) 高田英行 准教授 | |
| (論文題目) Iterative sequences for finitely many resolvent operators in geodesic spaces | | |
| (論文審査の要旨及び審査結果の要旨) 与えられた凸関数に対して、その最小値をとる定義域の要素を求める問題を凸最小化問題という。この問題は設定が単純であるが、多くの応用をもつ基本的な問題として非線形解析学の研究分野でも重要な研究対象となっている。この問題の簡単な一般化として、与えられる凸関数を複数にし、それらすべてに共通する最小点を求めることを考える。この問題はより適用範囲が広く、工学や経済学等への幅広い応用が考えられる。また、近年では凸関数の定義域として用いられてきたヒルベルト空間やバナッハ空間等の関数空間を、 $CAT(\kappa)$ 空間と呼ばれる測地距離空間へ変更することで、線形構造をもつとは限らない場合についても研究が進められている。このような空間は、従来のものと比較して空間のもつ幾何学的構造が大きく異なり、したがって、空間上で定義された凸関数のもつ性質も変わってくる。従来の凸解析学で得られている諸性質が、このような設定のもとではどのような性質へと変化するかが、最近の研究トピックとして注目されている。 本論文では、完備測地距離空間上で定義された有限個の凸関数族に対する共通最小点問題を扱い、解の近似列を生成する方法を提案する。一般に $CAT(\kappa)$ 空間は実数のパラメタ κ によって構造が変化するが、パラメタの符号が等しい場合は互いに相似な空間となるため、 $CAT(-1)$ 空間、 $CAT(0)$ 空間、 $CAT(1)$ 空間の3種類の場合を考えることが本質的である。本論文では $CAT(0)$ 空間と $CAT(1)$ 空間の2種類を研究対象とし、それぞれの空間において凸関数族の共通最小化問題に対する、解の近似列生成法を提案し、その収束性を証明している。 本論文で得られる解近似列では、いずれの手法でも共通して「リゾルベント作用素」と呼ばれる写像が利用されている。この作用素は与えられた凸関数から定義されるもので、従来は $CAT(0)$ 空間上の凸関数に対するリゾルベントがよく知られていた。最近の研究で $CAT(1)$ 空間上の凸関数に対するリゾルベントとしていくつかの形が提案さ | | |

れ、本論文では三角関数を用いて定義される、いわゆる $\tan \sin$ 型のリゾルベントを利用する。リゾルベントはその不動点集合がもとの凸関数の最小点集合と一致するなど、凸最小化問題を写像の不動点問題へと変換するための都合のよい性質を数多くもち、これによって、不動点近似理論の諸結果を凸最小化問題へ利用することが可能となる。

第一の主結果として、2 写像の共通最小点問題の解近似列生成が提案されている。この結果は、不動点近似理論における 2 写像の共通不動点近似定理を応用したものであるが、リゾルベントがもつパラメタが一定ではない場合を想定すると、収束性の証明にはさらに深い考察が必要となる。主結果の証明では、パラメタが一定でないリゾルベントの列が Δ 擬閉列という性質をもつこと等を利用し、生成点列が共通最小点問題の解に Δ 収束することを証明した。 Δ 収束は関数空間上の弱収束に相当する概念であるが、有限次元空間などのコンパクトな空間では通常の収束と同値であることが知られており、このことから提案手法による生成点列が解近似列として十分な性質をもつことがわかる。

論文の後半では、与えられた凸関数の有限族に対応して有限個のリゾルベント作用素を考え、それらを用いた近似点列の生成法を考察している。1 写像の場合から有限個の場合に拡張するにあたり、関数空間上の点列の場合は空間の線形性が利用できるため、いわゆる「凸結合」を複数個の点に対して用いることで点列の定義が可能である。これに対し、 $\text{CAT}(\kappa)$ 空間の場合には凸結合が 2 点間でしか定義されていないため、3 点以上の点に対してはどのように扱うかは議論の余地がある。この問題に対して、本論文の第二の結果では、2 点間の凸結合を繰り返し適用することで有限個の写像の凸結合を定義し、これを用いた生成点列が共通最小化問題の解へと収束することを示した。点列生成法としては、いわゆる Mann 型による生成方法と、アンカーポイントと呼ばれる固定点を用いた Halpern 型と呼ばれる手法の 2 種類が提案され、それぞれ完備 $\text{CAT}(1)$ 空間上での Δ 収束と強収束の定理が証明されている。

3 つ以上の点に対する凸結合を一般化した概念としては、上記の定義とは別に、均衡写像と呼ばれる概念がある。これは、2 点間の距離を用いて定義されたある主の凸関数の唯一の最小点を用いて定義される概念で、 $\text{CAT}(0)$ 空間上の均衡写像は 2018 年に提案された比較的新しいものである。本論文の第三の結果として、均衡写像をリゾルベント作用素の有限族に適用して点列を生成し、上記と同様に Mann 型と Halpern 型の 2 種類の生成法で収束定理を得た。さらに、第四の結果として、本論文では $\text{CAT}(1)$ 空間上での均衡写像を提案している。 $\text{CAT}(1)$ 空間は $\text{CAT}(0)$ 空間と異なり、より複雑な幾何学的構造をもつことが知られているが、三角関数を用いた定義をすることにより、空間の性質に適合した性質をもつ均衡写像を定義することに成功した。これを用いることで $\text{CAT}(1)$ 空間上での Mann 型共通最小化問題近似点列の収束定理も証明されている。

これら一連の結果より、本論文は測地距離空間における凸関数族の共通最小化問題に関する研究分野に一定の貢献をしたものと判断される。したがって論文著者の笠原健吾は博士（理学）の学位を授与されるに十分な資格があることを全審査委員は一致して確認した。

論文要旨

氏名 笠原 健吾

論文題目

Iterative sequences for finitely many resolvent operators in geodesic spaces

論文要旨

本研究の目的は有限個の凸関数の共通最小元を求めることである。凸関数の共通最小元を求めるような結果は様々な最適化問題に対して有効であることが知られている。凸関数の最小元を直接求めるのは一般的に難しいため、点列を用いて近似する方法を用いる。点列を用いた近似法は数多く存在するが、本論文では特に、Halpern 型および Mann 型とよばれる近似法に注目した。凸関数を用いて定義されたリゾルベントとよばれる作用素の不動点は、その凸関数の最小元と一致することが知られている。よって、リゾルベントの不動点を点列で近似することによって凸関数の最小元を間接的に近似できる。不動点近似は、Banach 空間や Hilbert 空間で行われている研究であり、本論文では CAT(1) や CAT(0) 空間と呼ばれる完備測地距離空間において不動点を近似する方法を考察した。また、CAT(1) や CAT(0) 空間では、点同士の凸結合をとる順序によって生成される点が異なる。したがって、本研究では、点列の構成について、点列が凸結合の順序に依存する場合と点列が凸結合の順序に依存しない場合の 2 つについて述べる。